

На правах рукописи

ТАХА Ахмед Шакер

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ
С ИЗВЕСТНЫМИ И НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ**

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2008

Работа выполнена на кафедре аэрогидромеханики Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор, заслуженный деятель
науки Татарстана
Клоков Владимир Васильевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук,
профессор, заслуженный деятель
науки и техники Татарстана
Зиннатуллин Назиф Хатмуллович

кандидат физико-математических
наук, в.н.с
Алимов Марс Мясумович

Ведущая организация: КНЦ РАН Институт механики и
машиностроения, г. Казань

Защита состоится 30 октября 2008 г. в 14 часов 30 минут в аудитории мех. 2 на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан “___” сентября 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент

А.А. Саченков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Аналитическое исследование тепловых (температурных) полей в областях со сложной геометрией границ или с заранее неизвестными границами по-прежнему остается актуальной проблемой. В частности, в практике использования различных нагревательных устройств применяется технологический выступ полигональной формы на границах этих устройств (примером могут служить оребрение границ). Для оценки эффективности введения таких выступов необходимо исследование их влияния на характер температурных полей и тепловых потоков как внутри области, так и на ее границе. Отдельный интерес представляет определение оптимальной формы изоляционного покрытия нагреваемых элементов с полигональными выступами на границе с целью уменьшения объема изоляционного материала при фиксированном коэффициенте теплопередачи. Необходимо отметить, что при решении таких задач оптимизации в прямой постановке могут возникнуть проблемы с неединственностью решения.

Целью работы является разработка методики расчета полей температуры и теплового потока, а также методики расчета оптимальной границы изоляционного покрытия нагревателя применительно к ряду задач с различной формой полигональных выступов на границе нагревателя.

Научная новизна результатов.

- разработана методика расчета полей температур и тепловых потоков для плоской задачи с полигональной границей, с помощью которой проведен анализ влияния на характер этих полей конфигурации различных полигональных выступов на границе нагревателя;
- разработана методика расчета оптимальной формы изоляционного покрытия нагревательных элементов с полигональной границей, с помощью которой проведен анализ влияния на оптимальную форму изоляции конфигурации различных полигональных выступов на границе нагревателя;
- установлено, что известный вывод о неединственности решения задачи по определению оптимальной формы изоляции двух источников тепла сохраняется и при учете возможного движения среды около свободной границы.

Научное и практическое значение работы. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней оценки размеров зон влияния полигональных выступов границы нагревателя на тепловые поля и оптимальную форму границы изоляционного покрытия могут быть использованы при анализе тепловых потоков, в частности, при прогнозировании потерь тепла в энергетических установках, а также при анализе

напряженно-деформируемого состояния среды в задачах термоупругости. Полученные результаты могут иметь практическое применение и иную интерпретацию в гидродинамике струйных течений, в теории фильтрации, в теории расчета взрыва на выброс и в теории предельной размерной электрохимической обработки металлов.

Достоверность результатов диссертации определяется использованием математических моделей, основанных на общих законах и уравнениях механики сплошных сред, сравнением результатов решения задач, полученных разными методами, а также сравнением их с известными в частных случаях результатами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды (Казань, 4 – 10 июля 2004 г.); на Итоговых научных конференциях Казанского государственного университета (Казань, 2004 – 2008 г.); на научной конференции Казанского научного центра РАН (Казань, 14 – 15 февраля 2007 г., 14 – 15 февраля 2008 г.); на Международной научной конференции «Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук» (г. Зеленодольск, 23 ноября 2006 г.). Работа выполнена в рамках решения задач по основному научному направлению исследования Казанского государственного университета «Краевые задачи и их приложения» и АН Республики Татарстан.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, в том числе две работы в журнале, предусмотренном списком ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на 161 страницах, содержит 54 рисунка и 21 таблиц. Список литературы насчитывает 61 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении отмечается актуальность темы, представлен краткий обзор литературы по теме диссертации (более подробный обзор дан отдельно по главам), формулируются цель и положения, выносимые на защиту. Дается краткий анализ структуры и содержания диссертации.

В первой главе рассмотрены задачи по расчету полей температуры и теплового потока в области с одиночным выступом на границе и анализа зоны влияния геометрических параметров нагревателя на невозмущенное тепловое поле. Задача имеет приложение к анализу теплообменных устройств. Решение получено с использованием гидродинамической аналогии задачи, состоящей в анализе безотрывного течения жидкости в областях с выступом на границе. Тепловое поле можно описать с помощью гидродинамики фиктивного потенциального тече-

ния идеальной несжимаемой жидкости. Разработан алгоритм решения задачи по расчету полей температуры и теплового потока в области с известными границами в прямой постановке, когда заданы не математические параметры задачи, а геометрические размеры области теплового поля. Анализируются гидродинамическая аналогия задач кондуктивной теплопроводности.

Все задачи этой главы характеризуются заданным на бесконечности тепловым потоком: $|\nabla T| = 1$, и при отсутствии выступа нагревателя тепловое поле было бы однородным. Под зоной влияния выступа будем понимать ту часть физической области, в которой тепловое поле отличается от однородного более, чем на 1% (по величине ∇T или его направлению).

В § 1 рассматриваются задачи по расчету полей температуры и теплового потока в бесконечных областях со сложной конфигурацией границы при наличии одиночного выступа.

В п. 1.1.1 рассматривается задача по расчету и анализу полей температуры и теплового потока в случае отдельного прямоугольного выступа.

В п. 1.1.1 формулируется постановка задачи по расчету температурного поля (в частности, изотерм и линий постоянного градиента температур) с целью проведения анализа влияния на них конфигурации прямоугольного выступа на границе. Рассматривается задача в области, когда на границах заданы постоянные значения температур T : $T = 0$ при $y = 0, 0 \leq x < \infty$ на изотерме АВ, $T = q$ при $1 \geq y \geq 1 - d, 0 \leq x \leq l$ на изотерме и на линии прямоугольной границы EDCB, $\partial T / \partial x = 0$ при $0 \geq y \geq 1 - d, x = 0$ на линии симметрии АЕ (рис. 1). Требуется в зависимости от геометрических параметров $ED = l$ и $CD = d$ (рис. 1) рассчитать тепловое поле, определить изотермы, линии постоянного значения градиента температуры и определить зоны влияния ширины выступа на невозмущенное поле.

При решении задачи использовались методы теории функций комплексного переменного, в частности, метод конформного отображения.

В п. 1.1.2 дано решение сформулированной задачи методом конформных отображений областей D_Z и D_W . С помощью интеграла Кристоффеля – Шварца находится функция конформного отображения области изменения вспомогательного переменного t , верхней полуплоскости D_t , на области D_Z и D_W при следующей нормировке точек: $t_A = 1, t_E = -1, t_D = \delta, t_C = \gamma$. Здесь δ, γ – пока неопределенные математические параметры рассматриваемой задачи.

Функция, осуществляющая первое конформное отображение при $t = t_1 + i t_2$ принимает вид

$$z(t) = \frac{1}{\pi q} \int_0^1 \frac{\sqrt{u(t_1 + i t_2) - u + 1 - \delta} \sqrt{u(t_1 + i t_2 - 1)}}{\sqrt{u(t_1 + i t_2) - u} \sqrt{u(t_1 + i t_2) - u + 1 - \gamma} \sqrt{u(t_1 + i t_2) - u + 2}} du.$$

Производная dw/dt в данном случае равна

$$dw/dt = 1/\pi \sqrt{t+1} \sqrt{t-1}.$$

Выражение неизвестных параметров через заданные геометрические размеры является нелинейным и представляет основную трудность решения задачи в ее прямой постановке. Установлена необходимая для решения задачи связь параметров δ, γ с геометрическими параметрами d, l в виде равенств

$$d = I_2/I_1 + I_2, l = dI_2/I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{s-\delta} ds}{\sqrt{1-s} \sqrt{s+1} \sqrt{s-\gamma}}, I_2 = \int_{\delta}^{-1} \frac{\sqrt{s-\delta} ds}{\sqrt{1-s} \sqrt{s-1} \sqrt{s-\gamma}},$$

$$I_3 = \int_{\gamma}^{\delta} \frac{\sqrt{s-\delta} ds}{\sqrt{1-s} \sqrt{s-1} \sqrt{s-\gamma}}.$$

Алгоритм для расчета координаты x, y точек линии изотермы в области z получен с использованием формулы, представленной выше для функции $z(t)$, где входящие в выражения переменные t_1, t_2 выражены через φ, ψ согласно равенствам

$$t_1 = ch\pi\varphi \cos\pi\psi, t_2 = \sin\pi\varphi \sin\pi\psi.$$

Для определения линии постоянного значения градиента температуры в области z используется формула, представленная выше для функции $z(t)$, где входящие в выражения переменные t_1, t_2 найдены с помощью следующего выражения для степени модуля сопряженной скорости \bar{v}

$$\left| \frac{\bar{v}}{q} \right|^4 = \frac{(t_1 - \gamma)^2 + t_2^2}{(t_1 - \delta)^2 + t_2^2}.$$

В п. 1.1.3 представлены результаты решения задачи и дан их анализ. Некоторые расчеты представлены на рис. 1. По этим результатам можно оценить зону влияния ширины выступа на невозмущенное тепловое поле. Результаты расчетов показывают, что с увеличением ши-

рины выступа размер зоны его влияния на тепловое поле увеличивается, выходя затем на постоянное значение (относительно точки C).

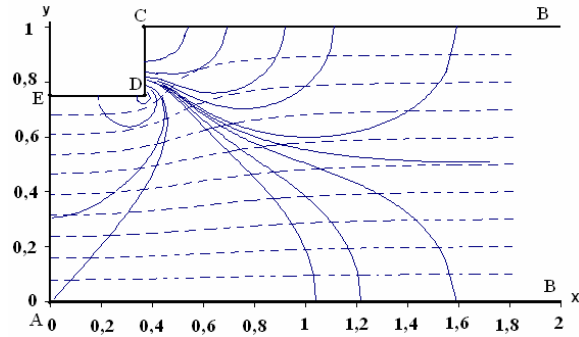


Рис.1. Линии постоянного градиента температур и изотермы (пунктир) при $l = 0,371$.

В п. 1.2 изучено влияние угла наклона грани выступа границы области на характер теплового поля. В этом случае задача содержит на один параметр меньше, чем в предыдущей задаче, что облегчает ее исследование. В гидродинамической интерпретации задача соответствует безотрывному обтеканию набегающим потоком выступа, грань которого длиной d наклонена под углом $\alpha\pi$ (рис. 2).

В п. 1.2.1 дано решение этой задачи методом, аналогичным п. 1.1. Приведены основные уравнения.

Получены выражения для определения dw/dt , z , $|\bar{v}|$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t+1} \sqrt{t-1}}, \quad z = \frac{1}{\pi q} \int_1^t \frac{(s-\delta)^{-\alpha} (s+1)^\alpha}{\sqrt{s-1} \sqrt{s+1}} ds, \quad \bar{v} = q \frac{(t-\delta)^\alpha}{(t+1)^\alpha}.$$

Представлена связь параметра δ с геометрическими параметрами d и α

$$d = 1 + \left(\int_{-1}^1 \frac{(s+1)^{\alpha-0.5} ds}{(s-\delta)^\alpha \sqrt{1-s}} \right) / \left((\sin \pi\alpha) \int_{\delta}^{-1} \frac{(-s-1)^{\alpha-0.5} ds}{(s-\delta)^\alpha \sqrt{1-s}} \right).$$

Из решения полученного нелинейного уравнения при заданном значении d определяется параметр δ . Выражение для степени модуля сопряженной скорости в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left| \frac{\bar{v}}{q} \right|^4 = \left((t_1 - \delta)^2 + t_2^2 \right)^{2\alpha} / \left((t_1 + 1)^2 + t_2^2 \right)^{2\alpha}.$$

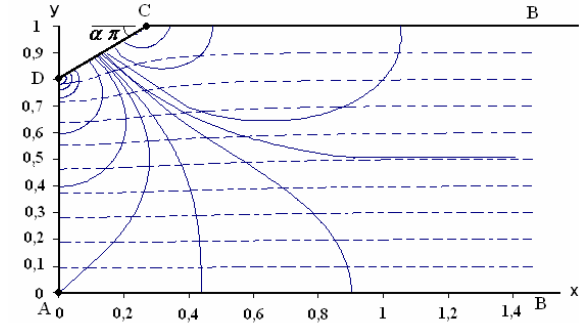


Рис. 2. Линии постоянного градиента температур и изотермы (пунктир) при $\alpha = 0, 2\pi$.

В п. 1.2.2 проведены расчеты, построены изотермы и линий постоянного значения градиента температуры. Результаты некоторых расчетов представлены на рис. 2. Из них, в частности, следует, что с уменьшением величины угла наклона выступа α при фиксированной величине d увеличивается зона его влияния.

В п. 1.3 рассматривается более общая задача по расчету температурного поля и теплового потока, когда область имеет симметричный четырехгранный выступ с углом наклона при вершине. Высота выступа FE равна h , длина грани выступа ED равна l и угол ее наклона равен $\alpha\pi$, расход в задаче гидродинамической аналогии равен q (рис. 3). Ниже представлено решение задачи по влиянию l , h и $\alpha\pi$ на характер определяемого теплового поля. Выражения функций z , dw/dt , $|\bar{v}|$ имеют в вид

$$z = c \int_1^t \frac{(s-\delta)^{0.5-\alpha} (s+1)^{-0.5+\alpha}}{\sqrt{s-1} \sqrt{s-\gamma}} ds, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{c_1}{\sqrt{t+1} \sqrt{t-1}}, \quad \bar{v} = q \sqrt{t-\gamma} (t-\delta)^{\alpha-0.5} / (t+1)^\alpha.$$

Получена нелинейная связь параметров δ , γ с геометрическими параметрами l , h и $\alpha\pi$ виде равенств

$$h = \frac{I_3 + I_2 \sin \pi\alpha}{I_3 + I_1 + I_2 \sin \pi\alpha}, \quad l = \frac{I_2}{I_3 + I_1 + I_2 \sin \pi\alpha},$$

где

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{(s-\delta)^{1/2-\alpha} (s+1)^{-1/2+\alpha}}{\sqrt{1-s} \sqrt{s-\gamma}} ds, \quad I_2 = \int_{\delta}^{-1} \left(\frac{s-\delta}{-s-1} \right)^{1/2-\alpha} \frac{ds}{\sqrt{1-s} \sqrt{s-\gamma}},$$

$$I_3 = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\frac{\delta - s}{-s - 1} \right)^{1/2 - \alpha} \frac{ds}{\sqrt{1-s} \sqrt{s-\gamma}}.$$

Эти выражения предоставляет собой систему нелинейных уравнений для нахождения параметров δ , γ , которая была решена численно. При определении начального приближения использовался метод номограмм.

В п. 1.3.1 проведены расчеты, построены изотермы и линий постоянного значения градиента температуры (рис. 3).

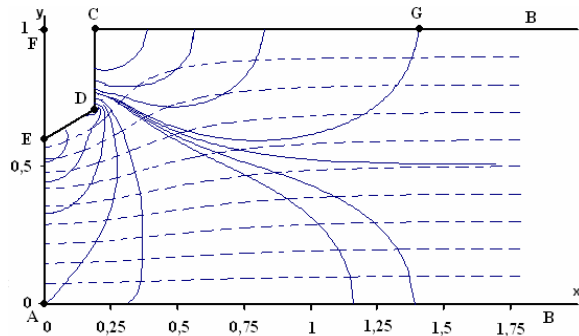


Рис. 3. Линии постоянного градиента температур и изотермы (пунктир) при $h = 0.4$, $l = 0.19$, $\alpha = 30^\circ$.

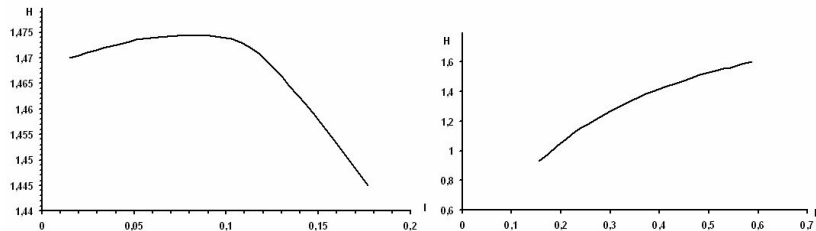


Рис. 4. Сопоставление зависимости величины зоны влияния: Слева – от ширины выступа при фиксированных значениях высоты $h=0.5$, $\alpha=30^\circ$; справа – от высоты выступа при фиксированных значениях ширины $l = 0.05$, $\alpha = 30^\circ$.

В п. 1.3.2 определены зоны влияния ширины и высоты симметричного четырехгранного выступа на тепловое поле (рис. 4). Размер зоны влияния характеризует расстояние H от точки C до точки границы CB , в которой $|\nabla T| = 0.99$.

Согласно расчетам, при фиксированных значениях высоты с увеличением ширины выступа расстояние H (CG) изменяется немонотонно,

это результат взаимного влияния ширины выступа и заостренной его части. При фиксированных значениях ширины с увеличением высоты выступа зона расстояния H увеличивается.

В п. 1.4 выступ, находящийся на границе, имеет форму четырехгранного многогранника с внутренним углом при вершине.

В этом случае анализ характера изотерм, рассчитанных по разработанному методу, показал, что кривые имеют две точки перегиба. Линии постоянного значения градиента температуры также имеют более сложное очертание. В частности, в окрестности угловых точек, где наблюдается повышенное и пониженное значение указанного градиента, у этих линий возможно несколько точек перегиба.

В п. 1.5 детально изучен вариант возможного пренебрежения шириной выступа по сравнению с его длиной.

Выражение для определения координат точек изотермы x , y в области z можно представить в виде

$$(f_1 + f_3/ch\pi x)^2 + (f_2/\sin\pi x)^2 = y - 1/\pi \operatorname{Arc} \cos[f_1 + f_3/ch\pi x],$$

где

$$f_1 = ch \frac{\pi \varphi}{q} \cos \frac{\pi \psi}{q} \cos^2 \frac{\pi d}{2}, f_2 = sh^2 \frac{\pi \varphi}{q} \sin \frac{\pi \psi}{q} \cos^2 \frac{\pi d}{2}, f_3 = tg^2 \frac{\pi d}{2} \cos^2 \frac{\pi d}{2}.$$

В результате решения некоторого квадратного уравнения удастся найти явное уравнение линии постоянного значения градиента температуры

$$x = 1/\pi \operatorname{Arcch} \left[-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4 b_1 b_3 / 2 b_1} \right],$$

где

$$b_1 = a \cos^2 \pi y - \cos^2 \pi y + a \sin^2 \pi y - \sin^2 \pi y, b_2 = 2a \cos \pi y \cos \pi d - 2 \cos \pi y, b_3 = a \cos^2 \pi d - a \sin^2 \pi y + \sin^2 \pi y - 1.$$

Помимо полей температуры и тепловых потоков в области, проанализированы распределения температуры и тепловых потоков на границах AB , CB , DC .

Во второй главе представлены решения тепловых задач со свободной границей, на которой выполняются условия постоянства величины температуры и градиента теплового потока. Эти решения могут быть использованы для определения оптимальной формы теплоизоляции различных нагревательных элементов. Под оптимальной понимается такая форма, которая реализует минимум расхода изоляционного материала при фиксированном коэффициенте теплоотдачи [Ентов В.М., Костерин А.В., Скворцов Э.В.].

В § 2 рассматриваются двумерные задачи для нахождения оптимальной границы изоляционного покрытия при заданной форме симметричного или несимметричного нагревателя разных конфигурации и анализа влияния геометрических параметров нагревателя на характер свободной границы. Решение задачи со свободной границей получено методом теории функций комплексного переменного с использованием функции Жуковского.

В п. 2.1 рассматривается задача для нахождения оптимальной границы изоляционного покрытия прямоугольного симметричного нагревателя и анализа влияния геометрических параметров нагревателя на характер свободной границы.

В п. 2.1.1 дается постановка задачи по определению оптимальной границы изоляционного покрытия прямоугольного симметричного нагревателя (рис.5). На линии EDCB (границе нагревателя): температура постоянна и известна $T = q$. На линии симметрии AD в направлении оси x тепловой поток отсутствует $\partial T / \partial x = 0$, а на свободной границе AB $T = 0$, $\partial T / \partial n = 1$, где производная берется в направлении нормали. При гидродинамической интерпретации фактически изучается безотрывное обтекание набегающим потоком выступа высотой d и шириной l со свободной границей.

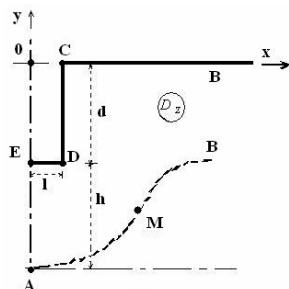


Рис. 5. Область изменения D_Z

В п. 2.1.2 дано решение задачи гидродинамическим методом с использованием функции Жуковского. Этот метод состоит в установлении связи между областью изменения D_Z и областью изменения D_χ , где χ обозначает функцию Жуковского

$$\chi = \ln dw/dz = \ln \left(v e^{-i\theta} \right) = \ln v - i\theta = \chi_1 + i\chi_2, \text{ где } dw/dz = v_x - iv_y.$$

Дифференциал dz представим в виде

$$dz = e^{-\chi} dw/dt dt.$$

Область изменения D_w является, согласно граничным условиям, полуполосой. Согласно теории интеграла Кристоффеля – Шварца производная dw/dt имеет

$$dw/dt = c_1 / \sqrt{t+1} \sqrt{t-1}.$$

Согласно граничным условиям задачи обтекания имеем на линиях:

$$AE: v_x > 0, v_y = 0, v_E = \infty, \theta = \pi/2; DC: v_x > 0, v_y > 0, v_D = \infty, \theta = \pi/2; ED: v_E = \infty, v_D = \infty, \theta = 0; EB: v_B = 1, \ln[v] = 0,$$

где θ – угол наклона вектора скорости к оси абсцисс.

В соответствии с этими граничными условиями определяется область изменения функции χ . Она представляет собой бесконечную полосу с разрезом BMA, где точка M характеризуется максимальным значением угла наклона касательной искомой линии, то есть является точкой перегиба. Положение ее заранее неизвестно.

Область χ является пятиугольником с углами

$$\alpha_A = \pi/2, \alpha_D = 0, \alpha_C = 0, \alpha_B = \pi/2, \alpha_M = 2\pi.$$

После интегрирования производной $d\chi/dt$ получим

$$\chi = c \int_1^t \frac{(s-\mu) ds}{\sqrt{s-1} (s-\delta) (s-\gamma)}.$$

Для нахождения параметров c, μ в зависимости от δ, γ рассмотрим три перехода; в плоскости t вблизи точки C с отрезка CB на отрезок CD по полуокружности малого радиуса, также переход в плоскости χ вблизи точки C с отрезка CB на отрезок CD и вблизи точки D с отрезка DA на отрезок CD по полуокружности малого радиуса. В результате получим два выражения коэффициента, при сравнении которых найдем связь параметра μ с параметрами δ, γ

$$\mu = 1 + \sqrt{1-\delta} \sqrt{1-\gamma}.$$

После интегрирования левой и правой части выражения дифференциала dz , нахождения производной dw/dt и функции χ на участках границ получим

$$l = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{1-\delta}} \exp \left(\tilde{c} \left(f \ln \frac{\sqrt{1-\delta} + \sqrt{v^2+2}}{\sqrt{1-\delta} - \sqrt{v^2+2}} + g \ln \frac{\sqrt{1-\gamma} + \sqrt{v^2+2}}{\sqrt{1-\gamma} - \sqrt{v^2+2}} \right) \right) \frac{dv}{\sqrt{v^2+2}},$$

$$d = -\frac{1}{\pi} \int_{t_D}^{t_C} \exp \left(\tilde{c} \left(f \ln \frac{\sqrt{1-\delta} + \sqrt{1-t}}{\sqrt{1-\delta} - \sqrt{1-t}} + g \ln \frac{\sqrt{1-\gamma} + \sqrt{1-t}}{\sqrt{1-\gamma} - \sqrt{1-t}} \right) \right) \frac{dt}{\sqrt{1-t} \sqrt{1-t}},$$

$$y_A = d - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp \left(\tilde{c} \left(f \ln \frac{\sqrt{1-\delta} + \sqrt{1-\sin \alpha}}{\sqrt{1-\delta} - \sqrt{1-\sin \alpha}} + g \ln \frac{\sqrt{1-\gamma} + \sqrt{1-\sin \alpha}}{\sqrt{1-\gamma} - \sqrt{1-\sin \alpha}} \right) \right) d\alpha,$$

где $f = \frac{\delta - \mu}{(\delta - \gamma)\sqrt{1 - \delta}}$, $g = \frac{\gamma - \mu}{(\gamma - \delta)\sqrt{1 - \gamma}}$, $\tilde{c} = \frac{\sqrt{1 - \gamma} (\gamma - \delta)}{2 (\gamma - \mu)}$.

Из решения системы нелинейных уравнений при заданных значениях d, l определяются параметры δ, γ .

В итоге параметрические уравнения искомой границы приобретают следующий вид при $l \geq t_N \geq -1$:

$$\begin{cases} x_N \\ y_N \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ y_A \end{cases} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{1 - 1/t_N}} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left[2\tilde{c} \left(f \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \delta}\sqrt{1 - \tau^2}} + g \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \gamma}\sqrt{1 - \tau^2}} \right) \right] \frac{d\tau}{(1 - \tau^2)\sqrt{2 - \tau^2}}.$$

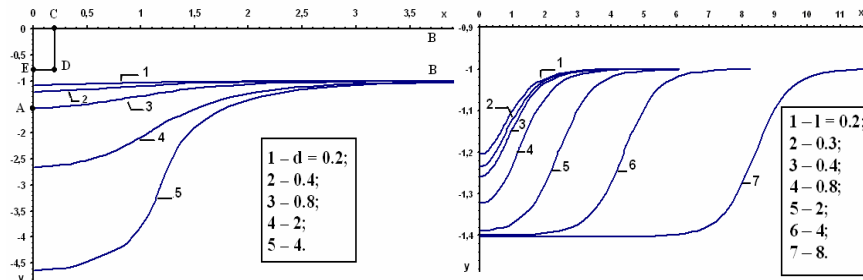


Рис. 6. Искомые границы АВ: слева – при $l = 0.2$; справа – при $d = 0.4$.

На рис.6 представлены некоторые варианты расчетов. Зона влияния различных размеров нагревателя на характер границы оптимального изоляционного покрытия определяется условием – менее 5% отклонения ординаты точек этой границы от линии $y = -1$, при этом из решения системы нелинейных уравнений находится t_R , а затем x_R (x_R, y_R – координаты границы области влияния). Из этих результатов, следует, что с увеличением высоты нагревателя при фиксированной его ширине или ширины нагревателя при фиксированной его длине зона его влияния увеличивается.

В п. 2.2 исследуется случай двухгранной границы выступа нагревателя и его влияние на границу оптимального изоляционного покрытия. Граничные условия для расчета теплового поля и нахождения его границы совпадают с условиями, указанными в предыдущем разделе, с той лишь разницей, что в данном разделе конфигурация выступа нагревателя другая (он является двухгранным с границами DCB). Полагая, что искомая граница может иметь точку перегиба, вследствие влияния угла наклона нагревателя на искомую границу. Область изменения функции χ с учетом граничных условий представляет собой

бесконечную полосу с разрезом по мнимой оси ВМА, где М образ точки перегиба границы АВ. Функция конформного отображения верхней полуплоскости изменения вспомогательного переменного t на области D_W, D_χ была найдена с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t+1} \sqrt{t-1}}, \quad \chi = c \int_1^t \frac{(s - \mu) ds}{\sqrt{s-1} (s+1) (s-\gamma)}.$$

Из выражений производной dw/dt и функции χ на участках границ получим

$$L = \frac{-2}{\pi} \int_{\sqrt{-\gamma-1}}^0 \left(\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{v^2 + 2})(\sqrt{1 - \gamma} + \sqrt{v^2 + 2})}{(\sqrt{1 - \gamma} - \sqrt{v^2 + 2})(\sqrt{2} + \sqrt{v^2 + 2})} \right)^\alpha \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 2}},$$

$$y_A = -L \sin \alpha \pi - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{(\sqrt{1 - \gamma} + \sqrt{1 - \sin \theta})(\sqrt{2} - \sqrt{1 - \sin \theta})}{(\sqrt{1 - \gamma} - \sqrt{1 - \sin \theta})(\sqrt{2} + \sqrt{1 - \sin \theta})} \right)^\alpha d\theta,$$

$$\begin{cases} x_N \\ y_N \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ y_A \end{cases} + \frac{2}{\pi} \int_0^s \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left[2\alpha \left(\operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{1 - \gamma}\sqrt{1 - \tau^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \tau^2}} \right) \right] \frac{d\tau}{(1 - \tau^2)\sqrt{2 - \tau^2}},$$

где $s = \sqrt{1 - \frac{1}{t_N}}$.

Для различных размеров выступа нагревателя построены линии искомых границ. Выполненные варианты расчетов позволяют сделать вывод, что зона влияния нагревателя на характер линии АВ при фиксировании угла наклона выступа увеличивается с увеличением его высоты, ширины или длины боковой грани и уменьшается с увеличением его угла наклона.

В п. 2.3 исследуется задача по определению границы оптимального изоляционного покрытия в пренебрежении шириной нагревателя. Задача отвечает условиям предыдущих задач в § 2 с той лишь разницей, что толщина выступа нагревателя равна нулю. После нахождения производной dw/dt и функции χ на участке DC получим следующее выражение длины выступа d через вспомогательный параметр γ

$$d = \frac{-2}{\pi} \int_{\sqrt{-\gamma-1}}^0 \left(\frac{(\sqrt{2} - \sqrt{v^2 + 2})(\sqrt{1 - \gamma} + \sqrt{v^2 + 2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{v^2 + 2})(\sqrt{1 - \gamma} - \sqrt{v^2 + 2})} \right)^\alpha \frac{dv}{\sqrt{v^2 + 2}}.$$

поэтому определяется область изменения функции χ . Найдена функцию конформного отображения верхней полуплоскости изменения вспомогательного переменного t на области D_W, D_χ с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{i q}{\pi \sqrt{t+1} \sqrt{t-1}}, \quad \chi = c \int_{-1}^t \frac{(s-\mu) ds}{\sqrt{s-1} \sqrt{s+1} (s-\gamma)}.$$

Отображение изменений вспомогательного переменного t верхней полуплоскости D_t на область D_χ с соответствием точек $t_A = -1, \chi_A = 0$, согласно теории интеграла Кристоффеля — Шварца, осуществляем с помощью функции χ . Учитывая обход по полуокружности малого радиуса в плоскости t около точки C , получим связь между параметрами γ, μ и c . Первая связь между математическими параметрами имеет вид

$$\mu = \gamma + \left(\sqrt{\gamma^2 - 1} / 2 \right).$$

Второе соотношение между параметрами установлено с учетом заданного расстояния L между источниками тепла в форме равенства

$$L = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty (I_1)^c I_2 du / \sqrt{(\gamma - u^2)^2 - 1},$$

где

$$I_1 = \left| \gamma - u^2 + \sqrt{(\gamma - u^2)^2 - 1} \right|, I_2 = \sqrt{\gamma (\gamma - u^2) + \sqrt{(\gamma^2 - 1) \left((\gamma - u^2)^2 - 1 \right)}} - 1.$$

Из решения нелинейного уравнения при заданном значении L определяется параметр γ .

Анализ решения показал, что при $1/\pi < L < 0.434$ решение является двузначным.

Параметрические уравнения искомой линии АВ представлены в следующем виде, где $1 \geq t_N \geq -1$:

$$\begin{Bmatrix} x_N \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d \end{Bmatrix} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{t_N} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[c \int_{-1}^t \frac{(s-\mu) ds}{\sqrt{1-s^2} (s-\gamma)} \right] \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Используемый метод позволяет находить координаты точки перегиба и точки экстремума свободной границы. На рис. 8 приведены примеры расчеты границ.

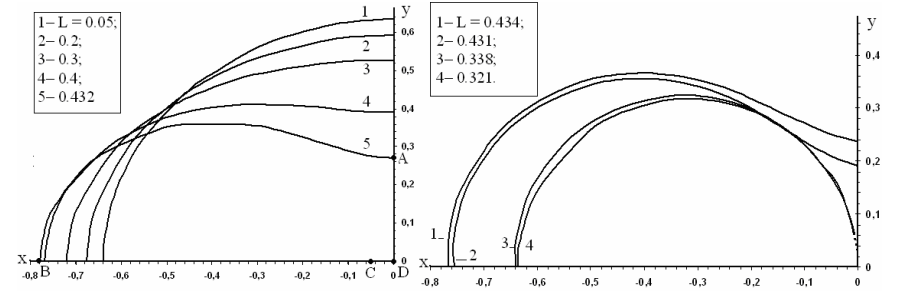


Рис. 8. Искомые границы АВ при изменении расстояния L .

В п. 3.4 найдено решение той же задачи методом краевых задач теории аналитических функций с использованием формул Синьорини и Сохоцкого. Метод состоит в восстановлении функции $\ln dz/dt$ в верхней полуплоскости по известным, согласно граничным условиям, либо вещественной, либо мнимой части этой функции на участках вещественной оси:

$$BC: \operatorname{Im} \ln \frac{dz}{dt} = 0, \quad CD: \operatorname{Im} \ln \frac{dz}{dt} = -2\pi, \quad AD: \operatorname{Im} \ln \frac{dz}{dt} = -\frac{3\pi}{2}, \quad AB: \left| \frac{dw}{dz} \right| = 1, \quad \left| \frac{dw}{dt} \right| = \frac{q}{\pi \sqrt{1-t^2}}.$$

В результате функция $\ln dz/dt$ в верхней полуплоскости $t > 0$ представляется в виде

$$\ln \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{i \pi} \left(i \int_{-\infty}^{\delta} \frac{-2 \pi d \tau}{\sqrt{\tau^2 - 1} (\tau - t)} + i \int_{\delta}^{-1} \frac{-\frac{3}{2} \pi d \tau}{\sqrt{\tau^2 - 1} (\tau - t)} + \int_{-1}^1 \frac{\ln(1/\pi \sqrt{1-\tau^2}) d \tau}{\sqrt{\tau^2 - 1} (\tau - t)} \right).$$

Для определения предельного значения сингулярных интегралов на границе используем формулу Сохоцкого. После интегрирования dz на соответствующих участках границы получены следующие формулы для вычисления расстояний L и d , а также параметрические уравнения для расчета координат точек границы АВ:

$$L = \int_{-\infty}^{\delta} g \exp \left(\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(\pi \sqrt{1-\tau^2}) d \tau}{\sqrt{1-\tau^2} (\tau - t)} \right) dt, \quad d = \int_{\delta}^{-1} g \exp \left(\frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln(\pi \sqrt{1-\tau^2}) d \tau}{\sqrt{1-\tau^2} (\tau - t)} \right) dt,$$

$$\begin{Bmatrix} x_N \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d \end{Bmatrix} + \int_{-1}^{t_N} J_{31} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[J - \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\pi i} J_{32} \right] dt,$$

где

$$g = \sqrt{-1+t\delta + \sqrt{(t^2-1)(\delta^2-1)}} \left/ \left(-t + \sqrt{t^2-1} \right) \sqrt{t-\delta} \right., J_1 = 2 \arcsin t - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t\delta-1}{\delta-t} - \frac{3}{4} \pi,$$

$$J_{31} = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}}, J_{32} = \int_{-1}^{t-\varepsilon} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}.$$

Таблица. Сравнение результатов

метод использования функции Жуковского								
$-\delta$	82.537	5.082	1.666	1.316	1.069	1.01	1.0067	1.000001
L	0.05	0.2	0.353	0.4	0.434	0.406	0.399	0.321
d	0.634	0.591	0.468	0.391	0.236	0.104	0.087	0.001
x_{\max}	0.638	0.675	0.746	0.768	0.766	0.731	0.721	0.636
метод использования формулы Синьорини								
$-\delta$	82.537	5.082	1.666	1.316	1.069	1.01	1.0067	1.000001
L	0.05	0.2	0.353	0.4	0.434	0.408	0.4	0.321
d	0.634	0.591	0.468	0.392	0.237	0.105	0.087	0.001
x_{\max}	0.636	0.673	0.743	0.766	0.771	0.728	0.717	0.631

Проведенное в таблице сравнение результатов решения задачи различными методами иллюстрирует вполне приемлемую точность использованных методов. В то же время метод краевых задач для аналитических функций, позволяет решить задачи с более сложными граничными условиями на искомой границе, в частности, задачи следующего параграфа.

В § 4 рассматриваются задачи по определению границы кондуктивного теплового поля при допущении движения среды около границы с учетом зависимости величины теплового потока на границе от скорости движения среды вблизи искомой границы. Задача носит модельный характер. Предполагается, что в одной и той же области с неизвестной границей имеют место два процесса, каждый из которых описывается уравнением Лапласа, кондуктивный перенос и потенциальное течение несжимаемой жидкости. Эти процессы взаимодействуют между собой только посредством свободной границы – считается, что тепловой поток и модуль скорости течения в каждой точке границы связаны локальным соотношением.

В § 4.1 получено решение задачи методом краевых задач для аналитических функций, когда зависимость величины градиента теплового потока на границе от модуля скорости течения v с заданной циркуляцией следует линейному закону ($\partial T / \partial n = 1 - a_1 v$). Согласно принятой схемы течения, линией тока является граница ABD, а линией симмет-

рией потенциального течения от точечного вихря интенсивности Γ – граница BCD. Неизвестный участок течения AB определяется в результате совместного решения гидродинамической и тепловой задачи (рис. 9).

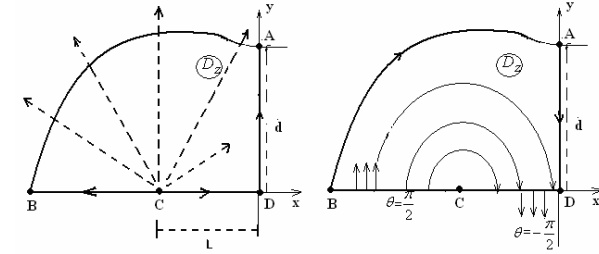


Рис. 9. Процессы в области D_Z : слева – тепловой; справа – гидродинамической

Производная dz/dt представляется как отношение производных dw/dt и dw/dz , которые можно интерпретировать как сопряженные скорости $\bar{v}(t)$ и $\bar{v}(z)$ течений фиктивных плоскопараллельных потенциальных потоков идеальной несжимаемой в областях D_I и D_Z .

Вещественная часть функции $\ln dz/dt$ на участке AB принимает вид

$$\ln \left| \frac{dz}{dt} \right|_{AB} = \ln \left(\frac{1}{\pi \sqrt{1-\tau^2}} + \frac{a \Gamma}{\pi \sqrt{\tau-\delta} \sqrt{1-\tau}} \right) d\tau.$$

В результате найдены параметрические уравнения свободной границы AB

$$\begin{Bmatrix} x_N \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d \end{Bmatrix} + \int_{-1}^{t_N} J_1 \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[J_2 - \frac{\sqrt{t^2-1}}{\pi i} J_3 \right] dt,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{\pi \sqrt{1-t^2}} + \frac{a \Gamma}{\pi \sqrt{t-\delta} \sqrt{t-1}} = J_2, \quad i(2 \arcsin t - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t\delta-1}{\delta-t} - \frac{3}{4} \pi),$$

$$J_3 = \int_{-1}^{t-\varepsilon} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}.$$

На рис. 10 приведены примеры расчетов. Результат показывает, что при фиксировании Γ с увеличением расстояния между источниками тепла искомая граница имеет тенденцию к растяжению вдоль оси x и сжатию вдоль оси y . В то же время установлено, что для малых L решение неединственное, аналогично задаче § 3.

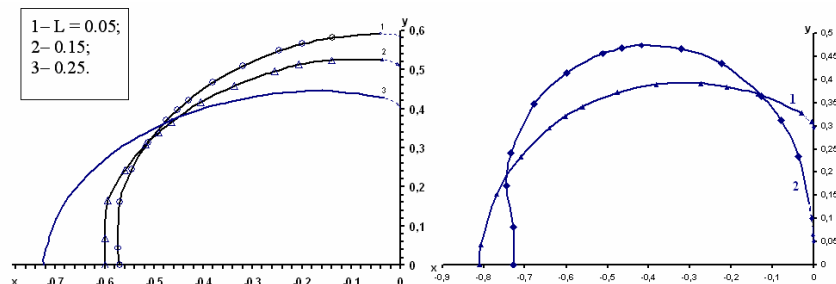


Рис. 10. Искомые границы при $\Gamma = 0.5$: **слева** – для различных значений длины L ; **справа** – для $L = 0.3$.

В п. 4.2 рассмотрена та же задача в случае, когда зависимость величины градиенты теплового потока на границе от модули скорости течения обратно пропорциональна $\partial T / \partial n = a/v$.

В результате решения задачи по методике п. 4.1 находятся параметрические уравнения искомой границы

$$\begin{Bmatrix} x_N \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d \end{Bmatrix} + \int_{-1}^{t_N} \frac{1}{J_3(t)} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left[J_1 - \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{\pi i} J_2 \right] dt,$$

где

$$J_1 = i(2 \arcsin t - \frac{1}{2} \arcsin \frac{t \delta - 1}{\delta - t} - \frac{3\pi}{4}), \quad J_2 = \int_{-1}^{t-\varepsilon} \frac{\ln[J_3(\tau)] d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)} + \int_{t+\varepsilon}^1 \frac{\ln[J_3(\tau)] d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-t)}.$$

$$J_3(\tau) = \pi(c t + b) \sqrt[4]{(\tau+1)(\tau-\delta)\sqrt{1-\tau}}, \quad J_3(t) = \pi(c t + b) \sqrt[4]{(t+1)(t-\delta)\sqrt{1-t}},$$

На рис. 11 приведены примеры расчетов.

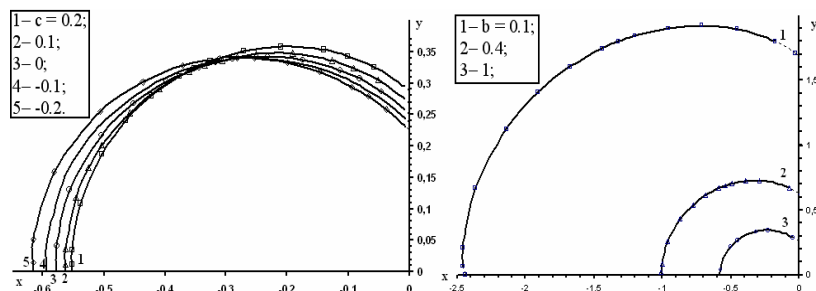


Рис. 11. Искомые границы АВ при $L = 0.25$ и: **слева** – $b = 1$ для различных значений величины c ; **справа** – $c = 0$ для различных значений величины b .

В заключении кратко подведены итоги выполненной работы.

Основные результаты.

- решение двумерной симметричной задачи определения температурного поля и теплового потока в бесконечной области с отдельным выступом полигональной конфигурации на границе, вывод уравнений для расчета изотерм и линий постоянного значения градиентов теплового потока для различных геометрических размеров выступа (ширины, высоты и угла наклона), алгоритм расчета указанных линий в прямой постановке задачи, расчет изотерм и линий постоянного значения градиентов теплового потока и их анализ;
- решение симметричной и несимметричной задач определения оптимальной границы изоляционного покрытия при заданной форме нагревателей на основе использования гидродинамической аналогии задачи и применения функции Жуковского, вывод аналитических выражений для расчета этой границы в прямой постановке задачи, анализ влияния геометрических размеров нагревателя на характер искомой границы;
- решение задачи по определению оптимальной границы тепловой изоляции для двух источников тепла, алгоритм расчета этой границы посредством сведения решения задачи со свободной границей к нахождению функции Жуковского и решению смешанной краевой границы теории аналитических функций комплексного переменного, параметрический анализ задачи;
- решение модельной задачи определения свободной границы кондуктивного теплового поля для двух источников тепла с учетом зависимости величины теплового потока от скорости движения среды вблизи искомой границы, алгоритм расчета этой границы, параметрический анализ задачи.

Выполнение темы было основано на методах, изложенных в монографиях Жуковского Н.Е., Лаврентьева М.А., Седова Л.И., Лыкова А.В., Тумашева Г.Г., Нужина М.Т., Ильинского Н.Б., Гахова Ф.Д.

Автор выражает признательность научному руководителю за постановку задачи и за поддержку в работе, а также сотрудникам кафедры аэрогидромеханики и управления по международным связям Казанского государственного университета за внимание.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Таха А.Ш. Задача по определению предельной границы плавления при наличии нескольких нагревателей методом гидродинамической аналогии / В.В. Клоков, А.Ш. Таха // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2008. – № 1. – С. 40 – 45.

2. *Таха А.Ш.* Определение предельной границы плавления с учетом движения среды / В.В. Клоков, А.Ш. Таха // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2008. – (принята в печать). – С. 1 – 7.
3. *Таха А.Ш.* Влияние выступа разных размеров на границе канала на характер теплового поля / А.Ш. Таха // Казанский гос. университет. Казань, 2005. 26с. Деп. в ВИНТИ 30.03.2005, № 437 – В2005.
4. *Таха А.Ш.* Влияние ширины выступа на границе канала на характер теплового поля / А.Ш. Таха // Казанский гос. университет. Казань, 2005.– 17с. Деп. в ВИНТИ 17.11.2005, № 1498 – В2005.
5. *Таха А.Ш.* Влияние угла выступа на границе канала на характер теплового поля / А.Ш. Таха // Казанский гос. университет. Казань, 2005.– 16с. Деп. в ВИНТИ 06.12.2005, № 1602 – В2005.
6. *Таха А.Ш.* Влияние симметричного четырехгранного выступа на границе канала на характер теплового поля / А.Ш. Таха // Казанский гос. университет. Казань, 2006.– 24с. Деп. в ВИНТИ 17.04.2006, № 507 – В2006.
7. *Таха А.Ш.* Задача по определению предельной границы плавления при заданной форме нагревателей / В.В. Клоков, А.Ш. Таха // Казанский гос. университет. Казань, 2006.– 27с. Деп. в ВИНТИ 11.01.07, № 28 – В2007.
8. *Таха А.Ш.* Определение предельной границы плавления в случае полигонального нагревателя методом гидродинамической аналогии / В.В. Клоков, А.Ш. Таха // Казанский гос. университет. Казань, 2007. 21 с. Деп. в ВИНТИ 26.09.07, № 907 – В2007.
9. *Таха А.Ш.* Влияние выступа на границе канала на характер теплового поля / А.Ш. Таха // Модели механики сплошной среды: Материалы XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды. Казань, 4 – 10 июля 2004 г. Т.27 – Казань, 2004. – С. 200 – 202.
10. *Таха А.Ш.* Определение предельной границы плавления в случае полигонального нагревателя / В.В. Клоков, А.Ш. Таха // Итоговой конференции Казанского научного центра РАН.: Тез. докл. Материалы научной конференции (Казань, 14 – 15 февраля 2007 г.). Т.13– Казань, 2007. – С. 151.
11. *Таха А.Ш.* Определение предельной границы плавления методом гидродинамической аналогии / В.В. Клоков, А.Ш. Таха // Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук: Тез. докл. Материалы научной конференции. Зеленодольск, 23 ноября 2006 года. С. 50 – 53.